الموضوع:

مبرهنة: لتكن $\{b_n\}$ متتالية عددية بحيث $b_n \geq 0$ مهما تكن n. $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ متقارب $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ متقاربة.

البرهان: بما أن $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ وبالتالي $|b_n| < 1$ من أجل $n > N$

نعلم أن $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{0}{0}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln \frac{1}{1+x}}{1} = 1$$

متزايدة $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+b_n)}{b_n} = 1 > 0$

حسب اختبار المقارنة بالنهاية تكون $\sum b_n$ و $\sum \ln(1+b_n)$ من طبيعة واحدة.

مبرهنة: لتكن $\{b_n\}$ متتالية عددية بحيث $0 \leq b_n \leq 1$

$\prod_{n=1}^{\infty}(1-b_n)$ متقارب $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ متقاربة.

مثال: ادرس تقارب الجداء $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$

الجداء متقارب لأن السلسلة $\sum_{n=2}^{\infty} b_n = \sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة.

تعريف: نقول عن الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ إنه متقارب مطلقاً إذا تقارب الجداء $\prod_{n=1}^{\infty}(1+|b_n|)$

نتيجة: $\prod_{n=1}^{\infty}(1+b_n)$ متقارب مطلقاً $\Leftrightarrow$ $\prod(1+|b_n|)$ متقارب $\Leftrightarrow$ $\sum |b_n|$ متقارب

يكافئ $\Leftrightarrow$ $\sum b_n$ متقاربة مطلقاً.

مثال: أوجد قيمة الجداء اللانهائي $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{9n^2}{9n^2-1}$

$$P_N = \prod_{n=1}^{N} \frac{9n^2}{9n^2-1} = \prod_{n=1}^{N} \frac{(3n)^2}{(3n-1)(3n+1)} \cdot \frac{3N}{3N}$$

$$= \frac{(3)^2 \cdot (1)^2}{(3-1)(3+1)} \cdot \frac{(3)^2 \cdot (2)^2}{5 \cdot 7} \cdot \frac{3^2 \cdot 3^2}{8 \cdot 10} \cdots\cdots \frac{(3N)^2}{(3N-1)(3N+1)}$$

$$= \frac{(3)^3 \cdot (1)^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{(3)^3 (2)^3}{5 \cdot 6 \cdot 7} \cdot \frac{3^3 \cdot 3^3}{8 \cdot 9 \cdot 10} \cdots\cdots \frac{(3N)^3}{(3N-1)(3N)(3N+1)}$$ نضرب ونقسم على $\frac{3N}{3N}$

الموضوع :

$$= \frac{3^{3N}(N!)^3}{(3N+1)^n}$$

علاقة ستيرلنغ : $N! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi N}$

$$\lim P_N = \lim \frac{3^{3N} \cdot \left(\frac{N}{e}\right)^N \cdot \sqrt{2\pi . N}}{\left(\frac{3N+1}{e}\right)^{n+1} \cdot \sqrt{2\pi(3N+1)}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\pi e \left(\frac{3N}{3N+1}\right)^{3N} \left(\frac{N}{3N+1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 2\pi e \cdot \frac{1}{e} \cdot \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$ الجداء متقارب وقيمته

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e}$

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$

تمرين : لتكن $\sum b_n$ سلسلة عددية متقاربة $\prod(1+b_n)$ متقارب $\overset{\text{إذا وفقط إذا}}{\Longleftrightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ متقاربة

البرهان : بما أن $\sum b_n$ متقاربة فإن $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ وبالتالي يكون

$|b_n| < 1 \quad \forall n \geq N$

لنأخذ $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n - Ln(1+b_n)}{b_n^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

نقسم الطرفين على $\frac{1}{2}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n - Ln(1+b_n)}{\frac{1}{2} b_n^2} = 1$$

$$\underset{\text{متقاربة}}{\Rightarrow} b_n - Ln(1+b_n) \sim \frac{1}{2} b_n^2$$

$\sum b_n^2$ متقاربة $\Longleftrightarrow$ $Ln(1+b_n)$ متقاربة $\Leftarrow$ $\prod(1+b_n)$ متقارب

$\lim_{x\to 0} \frac{x - Ln(1+x)}{x^2} = \frac{0}{0}$

حسب أوبيتال

$\frac{1 - \frac{1}{1+x}}{2x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2}}{2} = \frac{1}{2}$

مثال : ادرس التقارب المطلق والشرطي للجداء $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$

يتقارب الجداء اللانهائي مطلقاً إذا وفقط إذا تقاربت السلسلة $\sum b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ مطلقاً لكن سلسلة قيم المطلقة $\sum \frac{1}{n^{\frac{1}{2}\leq 1}}$ متباعدة والجداء اللانهائي لها متقارب مطلقاً .

لندرس التقارب الشرطي للجداء $\prod_{n=2}^{\infty}\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ لنأخذ السلسلة $\sum b_n = \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ متقاربة حسب اختبار لبينتز لنأخذ $\sum b_n^2 = \sum \frac{1}{n}$ هي سلسلة متباعدة (توافقية) بالتالي الجداء اللانهائي متباعد .

ملاحظة : تمرين : ادرس التقارب المطلق والشرطي : $\prod\left(1 + \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{n}\right)$ $\sum b_n = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \leq 2$ حسب اختبار ديرخليه

الموضوع:

تمرين: لنأخذ k عدد طبيعي ما ولتكن المتتالية:

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & ; \quad a_n \text{ زوجي} , \quad a_1 = k \\ 3a_n + 1 & ; \quad a_n \text{ فردي} \end{cases}$$

هل تمر بالعدد واحد.

---

* المتتاليات التابعية: $F_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$

لتكن $\{f_n\}$ متتالية من التوابع الحقيقية المعرفة على $E \subseteq \mathbb{R}$ يعني من أجل كل $x_0 \in E$ نتحصل على المتتالية العددية $\{F_n(x_0)\}$

تعريف: نقول عن متتالية التوابع $\{F_n\}$ إنها متقاربة نقطياً من التابع F المعرف على E إذا كان $\lim_{n \to \infty} F_n(x) = F(x)$ من أجل $x \in E$

مثال: لتكن المتتالية التوابع $F_n(x) = x^n$ معرفة على مجال $[0,1]$

من أجل $x = 0$

$F_n(0) = 0 \longrightarrow 0$

من أجل $x = 1$

$F_n(1) = 1 \longrightarrow 1$

من أجل $0 < x < 1$ $\quad F_n(x) = x^n \longrightarrow 0$ $\quad$ أخذنا $\frac{1}{2}$ رفعناها n ، $(\frac{1}{2})^n$

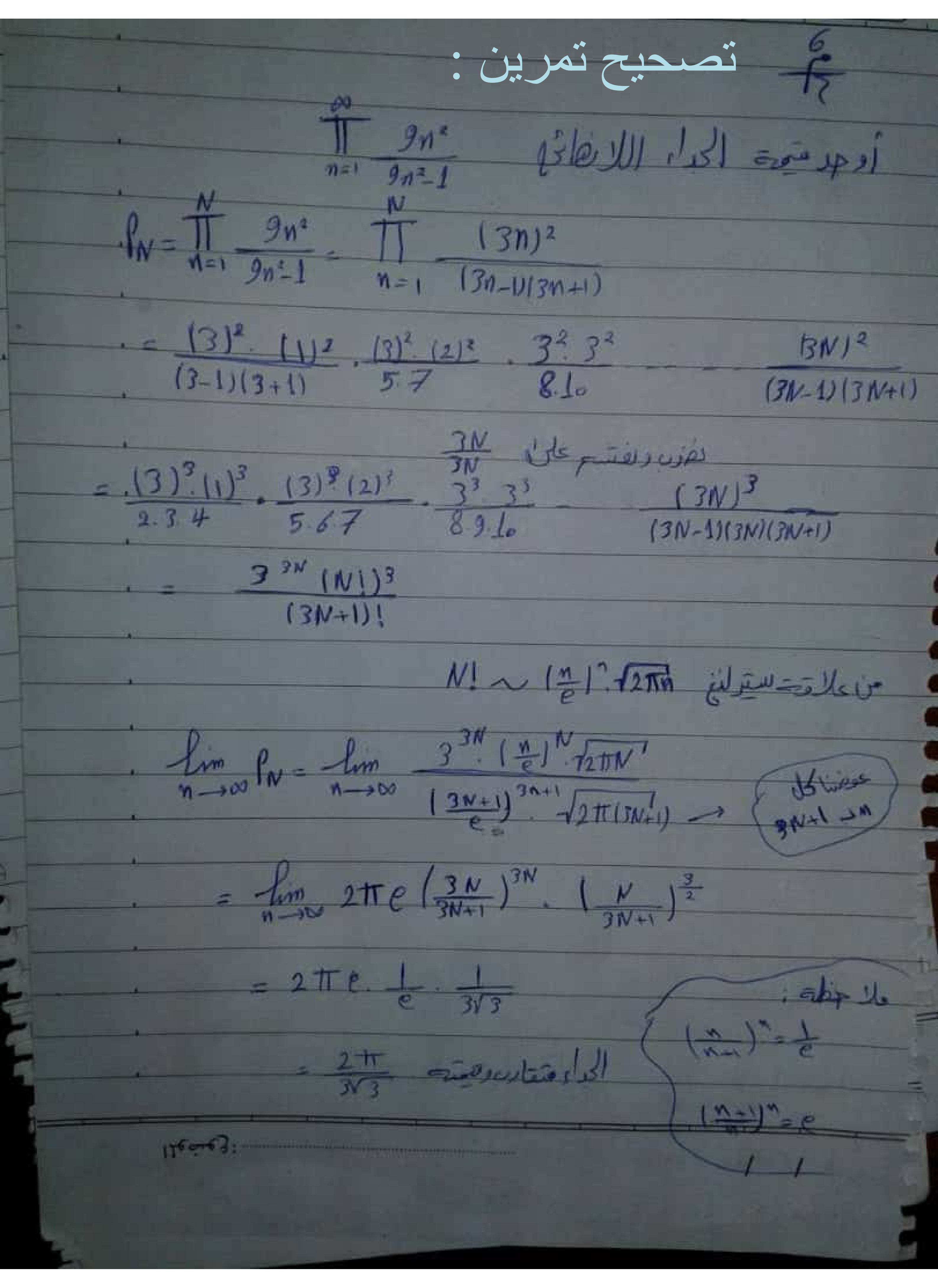
تتقارب المتتالية $\{F_n\}$ نقطياً من التابع F:

$$F(x) = \begin{cases} 1 & ; \quad x = 1 \\ 0 & ; \quad 0 \le x < 1 \end{cases}$$

تكون $\{f_n\}$ متقاربة نقطياً من f على E إذا كانت من أجل أي $x \in E$ وأي عدد حقيقي $\varepsilon > 0$ يوجد عدد طبيعي $N = N(\varepsilon, x_0)$ بحيث $\forall n > N$ $|F_N(x) - F(x)| < \varepsilon$

لتكن (f_n) متتالية من التوابع المعرفة على E ، تكون $\{f_n\}$ متقاربة بانتظام من التابع $f(x)$ على E إذا تحقق الشرط.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} ; \forall n > N \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon , \forall x \in E$$



تصحيح تمرين :

أوجد قيمة الجداء اللانهائي $\prod_{n=1}^{\infty}\frac{9n^2}{9n^2-1}$

$$P_N=\prod_{n=1}^{N}\frac{9n^2}{9n^2-1}=\prod_{n=1}^{N}\frac{(3n)^2}{(3n-1)(3n+1)}$$

$$=\frac{(3)^2\cdot(1)^2}{(3-1)(3+1)}\cdot\frac{(3)^2\cdot(2)^2}{5\cdot7}\cdot\frac{3^2\cdot3^2}{8\cdot10}\cdots\frac{(3N)^2}{(3N-1)(3N+1)}$$

نضرب ونقسم على $\frac{3N}{3N}$

$$=\frac{(3)^3\cdot(1)^3}{2\cdot3\cdot4}\cdot\frac{(3)^3(2)^3}{5\cdot6\cdot7}\cdot\frac{3^3\cdot3^3}{8\cdot9\cdot10}\cdots\frac{(3N)^3}{(3N-1)(3N)(3N+1)}$$

$$=\frac{3^{3N}(N!)^3}{(3N+1)!}$$

من علاقة ستيرلينغ $N!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$

$$\lim_{n\to\infty}P_N=\lim_{n\to\infty}\frac{3^{3N}\cdot\left(\frac{N}{e}\right)^{N}\sqrt{2\pi N}}{\left(\frac{3N+1}{e}\right)^{3n+1}\sqrt{2\pi(3N+1)}}$$

عوضنا كل n بـ 3N+1

$$=\lim_{n\to\infty}2\pi e\left(\frac{3N}{3N+1}\right)^{3N}\cdot\left(\frac{N}{3N+1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=2\pi e\cdot\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{3\sqrt3}$$

$$=\frac{2\pi}{3\sqrt3}$$ الجداء متقارب وقيمته

ملاحظة :

$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}$

$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=e$

التصحيح: